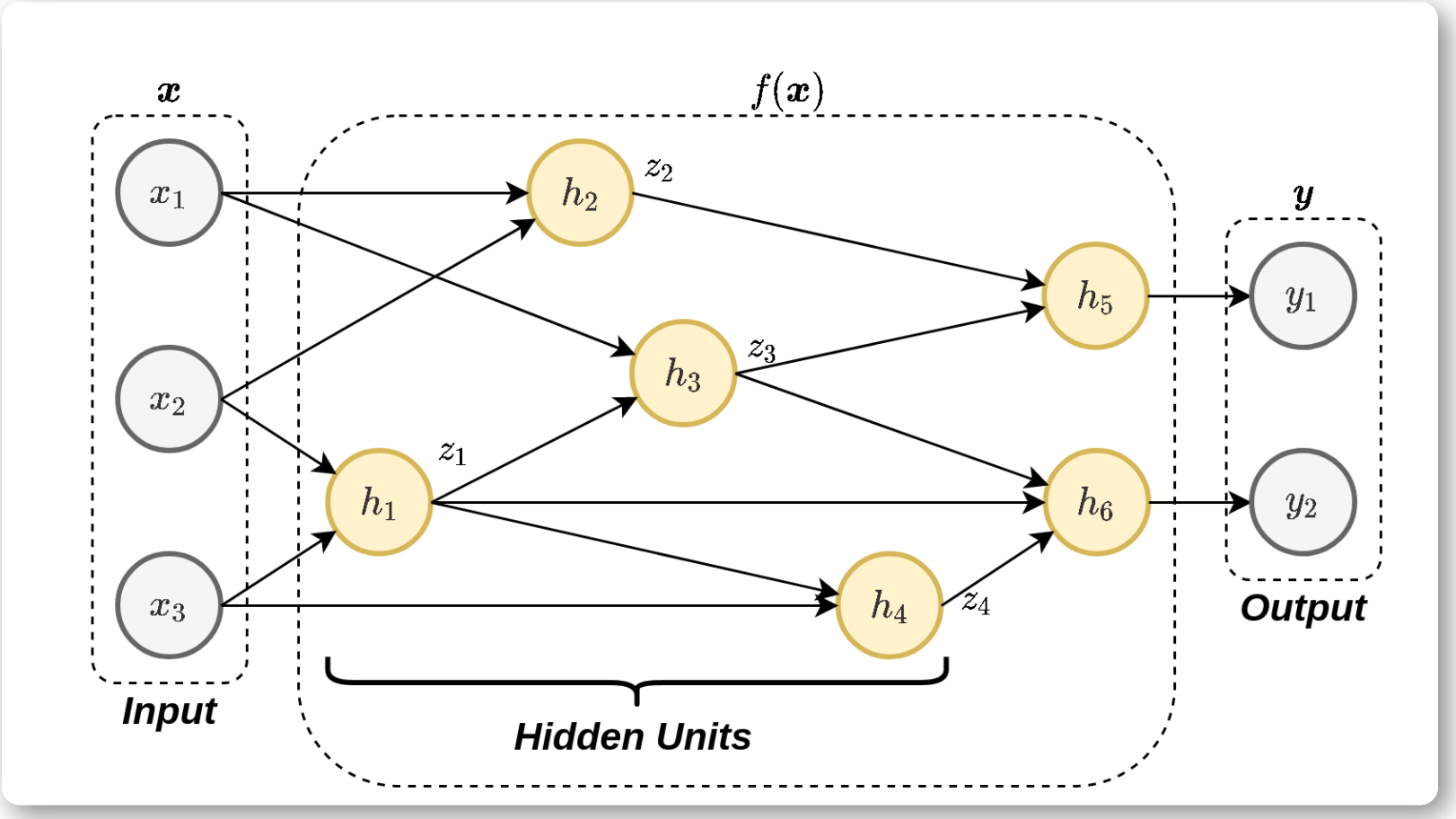
MLP and - 10 תרגול
Back-propagation

PDF

תקציר התיאוריה

(Artificial Neural Networks (ANN

- רשתות ניורונים מלאכותיות הינן שיטה לבניה של פונקציות פרמטריות.
- במקור, השיטה הינה (כנראה) בהשראת רשתות נוירונים ביולוגיות.
- ברשתות נוירונים מלאכותיות נשלב הרבה פונקציות פרמטריות פשוטות על מנת לקבל מודל אשר יכול לייצג פונקציות מורכבות.
- לרוב, הפונקציות הפשוטות יקבלו מספר משתנים ויחזירו סקלר.


$\boldsymbol{x}$
$f(\boldsymbol{x})$
$\boldsymbol{y}$
x_1
x_2
x_3
h_1
h_2
h_3
h_4
h_5
h_6
z_1
z_2
z_3
z_4
y_1
y_2
Input
Hidden Units
Output

לרוב נבחר את הפונקציות הפשוטות להיות מהצורה:

$$h(\boldsymbol{x};\boldsymbol{w},b)=\varphi(\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{x}+b)$$

- **זה בעצם ״נוירון״.**
- **φ סקאלרית לא לינארית ומכונה פונקציית ההפעלה.**
- **בחירות נפוצות של פונקציית ההפעלה הינן:**
  - **הפונקציה הלוגיסטית (סיגמואיד):** $\varphi(x)=\sigma(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$
  - **טנגנס היפרבולי:** $\varphi(x)=\tanh(x/2)$
  - **ReLU (Rectified Linear Unit):** $\varphi(x)=\max(x,0)$

מושגים:

- **יחידות נסתרות (hidden units): הנוירונים אשר אינם מחוברים למוצא הרשת (אינם נמצאים בסוף הרשת).**
- **רשת עמוקה (deep network): רשת אשר מכילה מסלולים מהכניסה למוצא, אשר עוברים דרך יותר מיחידה נסתרת אחת.**
- **ארכיטקטורה: הצורה שבה הנוירונים מחוברים בתוך הרשת.**

מוטיבציה

- **רשתות נוירונים הן פונקציות פרמטריות לכל דבר ועניין.**
- **נשתמש בהן בקורס למטרות הבאות:**
  - **פתרון בעיות סיווג בגישה הדיסקרימינטיבית הסתברותית.**
  - **פתרון בעיות רגרסיה בשיטת ERM.**
- **לרוב, נפתור את בעיות האופטימיזציה של מציאת הפרמטרים בעזרת gradient descent.**
  - **ניעזר באלגוריתם שנקרא back-propagation על מנת לחשב את הנגזרות של הרשת על פי הפרמטריים.**

הערה: נשתמש בוקטור θ אשר יאגד את כל הפרמטרים של הרשת (הפרמטרים של כל הנוירונים).

הערה לגבי השם loss

- עד כה השתמשנו בשם loss בהקשר של פונקציות risk (הקנס שמקבלים על שגיאת חיזוי בודדת מסויימת).
- בהקשר של רשתות נוירונים משתמשים לרוב במושג זה על מנת לתאר את הפונקציית המטרה (ה objective) שאותו רוצים למזער בבעיית האופטימיזציה.
- בכדי למנוע בלבול, בקורס זה נשתדל להיצמד להגדרה המקורית של פונקציית ה loss (שמגדירה את פונקציית ה risk) ונמשיך להשתמש בשם פונקציית מטרה או objective בכדי לתאר את הביטוי שאותו אנו רוצים למזער.

Back-Propagation

- **Back-propagation הוא אלגוריתם המשתמש בכלל השרשת על מנת לחשב את הנגזרות של רשת נוירונים.**

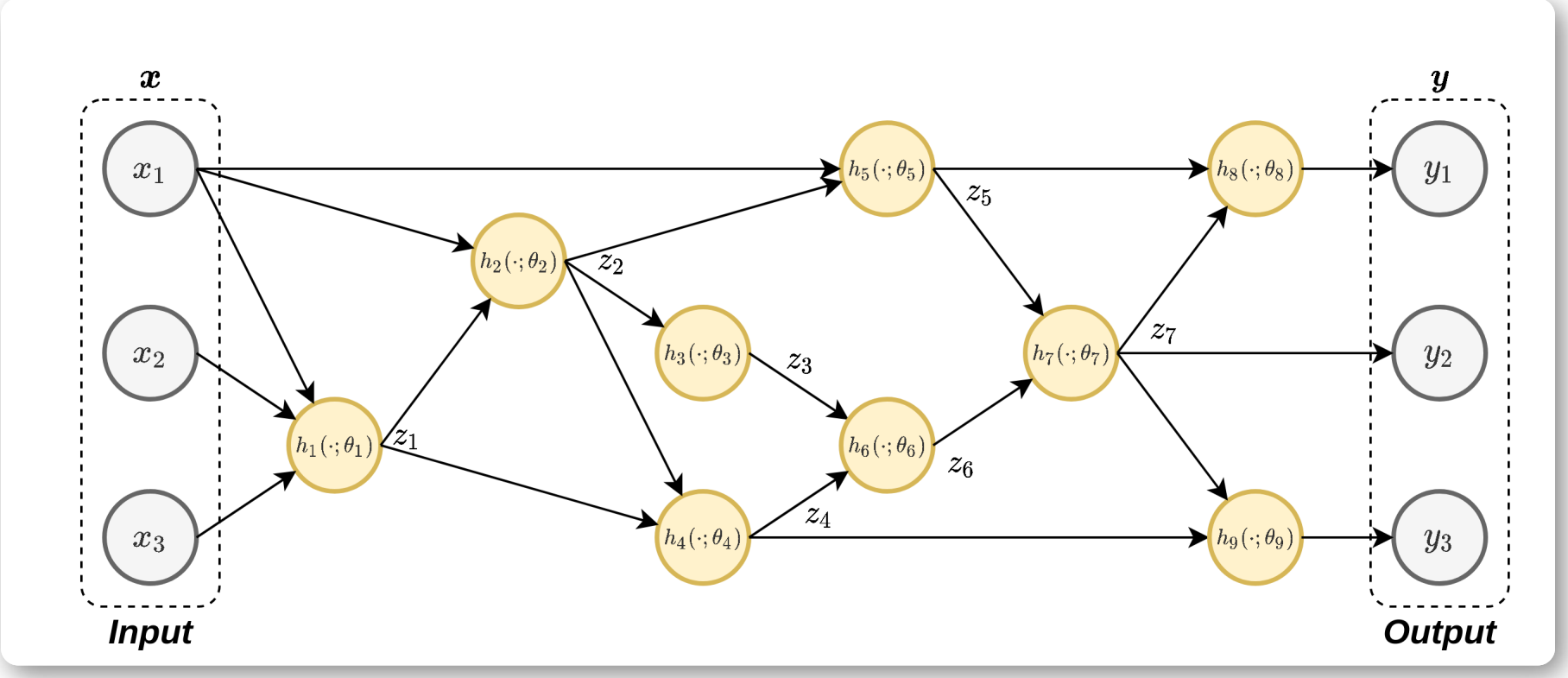
- **המטרה באלגוריתם זה היא לחשב את הנגזרת של המוצא ביחס לכל אחד מהפרמטרים ברשת, כך שלאחר מכן נוכל להפעיל את אלגוריתם gradient descent על מנת לעדכן את הפרמטרים**

- **תזכורת לכלל השרשרת:**

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(z_1(x),z_2(x),z_3(x)) = &\left(\frac{\partial}{\partial z_1}f(z_1(x),z_2(x),z_3(x))\right)\frac{d}{dx}z_1(x)\\ &+\left(\frac{\partial}{\partial z_2}f(z_1(x),z_2(x),z_3(x))\right)\frac{d}{dx}z_2(x)\\ &+\left(\frac{\partial}{\partial z_3}f(z_1(x),z_2(x),z_3(x))\right)\frac{d}{dx}z_3(x)\end{aligned}$$

דוגמא (מההרצאה)

נסתכל על הרשת הבאה:



- עבור x ו θ נתונים:
- נרצה לחשב את הנזרות של מוצא הרשת y לפי הפרמטרים θ.

נסתכל לדוגמא על הנגזרת של y_1 לפי θ_3. לשם הנוחות נסמן ב z_i את המוצא של הניורון h_i.

נוכל לפרק את $\frac{\partial y}{\partial \theta_3}$ על פי כלל השרשת:

$$\frac{\partial y_1}{\partial \theta_3} = \frac{\partial y_1}{\partial z_3}\frac{\partial z_3}{\partial \theta_3} = \frac{\partial y_1}{\partial z_3}\frac{\partial h_3}{\partial \theta_3}$$

נוכל לפרק גם את $\frac{dy_1}{dz_3}$ על פי כלל השרשרת:

$$\frac{\partial y_1}{\partial z_3} = \frac{\partial y_1}{\partial z_6}\frac{\partial z_6}{\partial z_3} = \frac{\partial y_1}{\partial z_6}\frac{\partial h_6}{\partial z_3}$$

ונוכל להמשיך ולפרק את $\frac{dy_1}{dz_6}$:

$$\frac{\partial y_1}{\partial z_6} = \frac{\partial y_1}{\partial z_7}\frac{\partial z_7}{\partial z_6} = \frac{\partial h_8}{\partial z_7}\frac{\partial h_7}{\partial z_6}$$

- זאת אומרת שאם נדע לחשב את הנגזרות של $\frac{dh_i}{dz_i}$ ו $\frac{dh_i}{d\theta_i}$ נוכל לחשב את הגזרות לפי כל הפרמטרים.
- נסתכל לדוגמא על הנגזרת:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_6} h_6(z_3, z_4; \theta_6)$$

- ראשית, נגזור את הפונקציה h_6 ונציב את הערכים של z_3, z_4 ו θ_6.
- בכדי לחשב את הערכים של z_i עלינו להעביר את x דרך הרשת ולשמור את כל ערכי הביניים z_i. חישוב זה של ערכי הביניים נקרא ה **forward pass**.

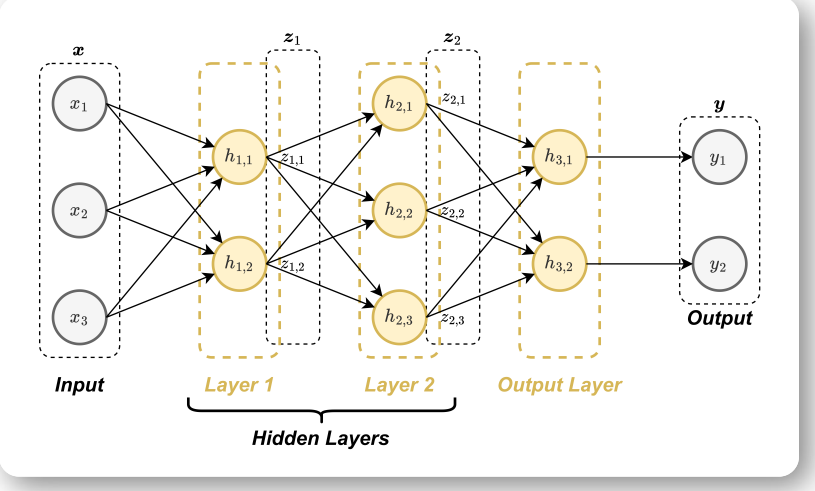
לאחר שחישבנו את ערכי הביניים z_i, נוכל להתחיל לחשב את כל הנגזרות של הרשת מהמוצא לכיוון הכניסה. זאת אומרת:

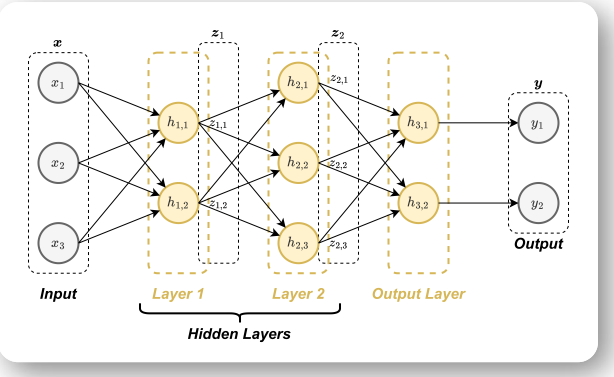
1. נחשב את: $\frac{\partial y_1}{\partial z_7}$, $\frac{\partial y_1}{\partial \theta_8}$.
2. נשתמש ב $\frac{\partial y_1}{\partial z_7}$ בכדי לחשב את $\frac{\partial y}{\partial z_6}$, $\frac{\partial y}{\partial z_5}$, $\frac{\partial y_1}{\partial \theta_7}$.
3. נשתמש ב $\frac{\partial y_1}{\partial z_6}$ בכדי לחשב את $\frac{\partial y}{\partial z_4}$, $\frac{\partial y}{\partial z_3}$, $\frac{\partial y_1}{\partial \theta_6}$.

וכן הלאה. מכיוון שבשלב זה אנו מחשבים את הנגזרות מהמוצא לכיוון הכניסה, שלב זה נקרא ה **backward pass** ומכאן גם מקבלת השיטה את שמה.

(MultiLayer Perceptron (MLP

- ארכיטקטורה נפוצה לרשת נוירונים נקראת **MLP**.
- במודל זה הנוירונים מסודרים בשתיים או יותר שכבות (layers) של נוירונים.
- השכבות ב MLP הן שכבות שמכונות **Fully Connected (FC)**:
  - כל נוירון מוזן מ**כל** הנוריונים שבשכבה שלפניו.





הניורונים הם מהצורה:

$$h_{i,j}(\boldsymbol{z}_{i-1}; \boldsymbol{w}_{i,j}, b_{i,j}) = \varphi(\boldsymbol{w}_{i,j}^T \boldsymbol{z}_{i-1} + b_{i,j})$$

- **הפרמטרים הנלמדים הינם המשקולות $w_{i,j}$ ואברי היסט $b_{i,j}$ בקומבינציה הלניארית שמכיל כל נוירון $h_{i,j}$.**

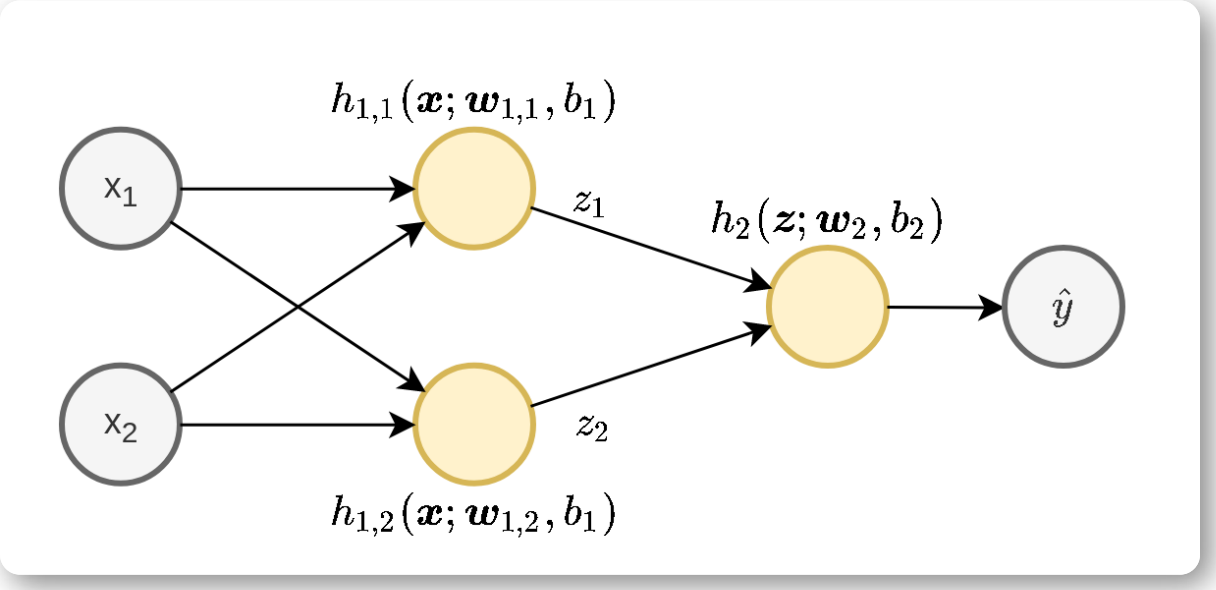
ה Hyperparameters של MLP הינם:

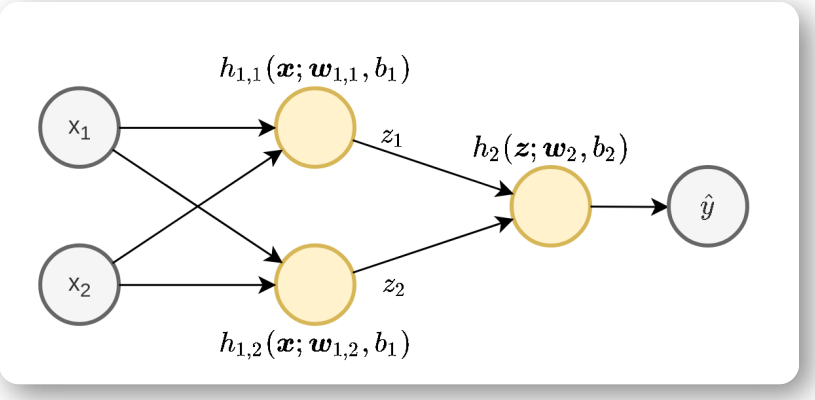
- **מספר השכבות**
- **מספר הנוירונים בכל שכבה**
- **פונקציית האקטיבציה (שיכולה להשתנות משכבה לשכבה)**

תרגיל 10.1 - Back propagation in MLP

נפתור בעיית רגרסיה בעזרת ERM ורשת ה MLP הבאה:

- **כניסה באורך 2**
- **שכבה נסתרת אחת ברוחב 2**
- **יציאה באורך 1 (מוצא סקלרי)**





- **ב-** $h_{1,1}$ **ו-** $h_{1,2}$ **יש פונקציית אקטיבציה מסוג ReLU**
- **ב-** h_2 **אין פונקציה אקטיבציה.**

$$h_{1,1}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{w}_{1,1},b_1) = \max(\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{w}_{1,1} + b_1, 0)$$
$$h_{1,2}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{w}_{1,2},b_1) = \max(\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{w}_{1,2} + b_1, 0)$$
$$h_2(\boldsymbol{z};\boldsymbol{w}_2,b_2) = \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{w}_2 + b_2$$

שימו לב: איבר ההיסט בשכבה הראשונה b_1 **משותף לשתי הנוירונים בשכבה זו.**

נרכז את כל הפרמטרים של הרשת לוקטור פרמטרים אחד:

$$\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{w}_{1,1}^\top, \boldsymbol{w}_{1,2}^\top, b_1, \boldsymbol{w}_2^\top, b_2]^\top$$

ונסמן את הפונקציה שאותה הרשת מממשת ב $\hat{\boldsymbol{y}} = f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta})$**.**

1) בעבור מדגם נתון $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{x}^{(i)}, y^{(i)}\}_{i=1}^{N}$ ופונקציית מחיר מסוג RMSE רשמו את בעיית האופטימיזציה שיש לפתור. בטאו את תשובתכם בעזרת הפונקציה f.

פתרון:

פונקציית המחיר (סיכון) של RMSE נתונה על ידי:

$$\sqrt{\mathbb{E}\left[(\hat{\mathrm{y}}-\mathrm{y})^2\right]}=\sqrt{\mathbb{E}\left[(f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})-\mathrm{y})^2\right]}$$

הסיכון האמפירי מתקבל על ידי החלפה של התחולת בממוצע על המדגם:

$$\sqrt{\frac{1}{N}\sum_i (f(\boldsymbol{x}^{(i)};\boldsymbol{\theta})-y^{(i)})^2}$$

בעיית האופטימיזציה שנרצה לפתור הינה למצוא את הפרמטרים שימזערו את הסיכון האמפירי:

$$\arg\min_{\boldsymbol{\theta}}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_i (f(\boldsymbol{x}^{(i)};\boldsymbol{\theta})-y^{(i)})^2}=\arg\min_{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{N}\sum_i (f(\boldsymbol{x}^{(i)};\boldsymbol{\theta})-y^{(i)})^2$$

2) נפתור את בעיית האופטימיזציה בעזרת gradient descent עם גודל קצב לימוד η. רשמו את כלל העדכון של הפרמטרים של המודל θ על ידי שימוש בגרדיאנט של הרשת לפי הפרמטרים, $\nabla_\theta f(x;\theta)$.

נסמן את ה objective שאותו נרצה למזער ב:

$$g(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_i (f(\boldsymbol{x}^{(i)};\boldsymbol{\theta}) - y^{(i)})^2$$

כלל העדכון של הפרמטרים הינו:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}^{(t+1)} &= \boldsymbol{\theta}^{(t)} - \eta \nabla_{\boldsymbol{\theta}} g(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}^{(t)}) \\
&= \boldsymbol{\theta}^{(t)} - \eta \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{N}\sum_i (f(\boldsymbol{x}^{(i)};\boldsymbol{\theta}^{(t)}) - y^{(i)})^2 \\
&= \boldsymbol{\theta}^{(t)} - \frac{2\eta}{N}\sum_i (f(\boldsymbol{x}^{(i)};\boldsymbol{\theta}^{(t)}) - y^{(i)}) \nabla_{\boldsymbol{\theta}} f(\boldsymbol{x}^{(i)};\boldsymbol{\theta}^{(t)})
\end{aligned}$$

3) נתון המדגם הבא באורך 2:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = [1, 2]^\top \qquad y^{(1)} = 70$$
$$\boldsymbol{x}^{(2)} = [0, -1]^\top \qquad y^{(2)} = 50$$

כמו כן, נתון כי בצעד מסויים t הערכים של הפרמטרים הינם:

$$b_1^{(t)} = 1$$
$$\boldsymbol{w}_{1,1}^{(t)} = [2, 3]^\top$$
$$\boldsymbol{w}_{1,2}^{(t)} = [4, -5]^\top$$
$$b_2^{(t)} = 6$$
$$\boldsymbol{w}_2^{(t)} = [7, 8]^\top$$

חשבו את הערך של $b_1^{(t+1)}$ בעבור $\eta = 0.01$.

נרצה לחשב את:

$$\boldsymbol{b}_1^{(t+1)} = \boldsymbol{b}_1^{(t)} - \frac{2\eta}{N}\sum_i (f(\boldsymbol{x}^{(i)};\boldsymbol{\theta}^{(t)}) - y^{(i)})\frac{d}{db_1} f(\boldsymbol{x}^{(i)};\boldsymbol{\theta}^{(t)})$$

נחשב את $\frac{d}{db_1} f(\boldsymbol{x}^{(i)};\boldsymbol{\theta}^{(t)})$ בעזרת back-propagation.

$i = 1$

נחשב את ה forward-pass בשביל למצוא את משתני הביניים ואת המוצא:

$$z_1 = \max(\boldsymbol{x}^{(1)\top}\boldsymbol{w}_{1,1} + b_1, 0) = \max([1,2][2,3]^\top + 1, 0) = \max(9, 0) = 9$$

$$z_2 = \max(\boldsymbol{x}^{(1)\top}\boldsymbol{w}_{1,2} + b_1, 0) = \max([1,2][4,-5]^\top + 1, 0) = \max(-5, 0) =$$

$$y = \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{w}_2 + b_2 = [9,0][7,8]^\top + 6 = 69$$

- **נחשב את הנגזרות ב backward-pass.**
- **נתחיל בחישוב של $\frac{d\hat{y}}{dz_1}$ ו $\frac{d\hat{y}}{dz_1}$:**

$$\frac{d\hat{y}}{dz_1} = \frac{d}{dz_1}(\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{w}_2 + b_2) = w_{2,1} = 7$$
$$\frac{d\hat{y}}{dz_2} = \frac{d}{dz_2}(\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{w}_2 + b_2) = w_{2,2} = 8$$

נשתמש בחישוב זה בכדי לחשב את $\frac{d}{db_1} f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \frac{d\hat{y}}{db_1}$, נשים לב ש b_1 מופיע פעמים ברשת, ב $h_{1,1}$ וב $h_{1,2}$:
(נשתמש בעובדה ש $\frac{d}{dx}\max(x,0) = I\{x>0\}$)

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{y}}{db_1} &= \frac{d\hat{y}}{dz_1}\frac{dz_1}{db_1} + \frac{d\hat{y}}{dz_2}\frac{dz_2}{db_1} \\ &= 7 \cdot I\{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{w}_{1,1} + b_1 > 0\} + 8 \cdot I\{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{w}_{1,2} + b_1 > 0\} = 7\end{aligned}$$

$i = 2$

נחשב באופן דומה את ה- Forward Pass:

$$z_1 = \max(\boldsymbol{x}^{(2)\top}\boldsymbol{w}_{1,1} + b_1, 0) = \max([0,-1][2,3]^\top + 1, 0) = \max(-2, 0) =$$
$$z_2 = \max(\boldsymbol{x}^{(2)\top}\boldsymbol{w}_{1,2} + b_1, 0) = \max([0,-1][4,-5]^\top + 1, 0) = \max(6, 0) =$$
$$y = \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{w}_2 + b_2 = [0,6][7,8]^\top + 6 = 54$$

:Backward-pass

$$\frac{d\hat{y}}{dz_1} = \frac{d}{dz_1}(\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{w}_2 + b_2) = w_{2,1} = 7$$
$$\frac{d\hat{y}}{dz_2} = \frac{d}{dz_2}(\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{w}_2 + b_2) = w_{2,2} = 8$$

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{y}}{db_1} &= \frac{d\hat{y}}{dz_1}\frac{dz_1}{db_1} + \frac{d\hat{y}}{dz_2}\frac{dz_2}{db_1} \\ &= 7 \cdot I\{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{w}_{1,1} + b_1 > 0\} + 8 \cdot I\{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{w}_{1,2} + b_1 > 0\} = 8\end{aligned}$$

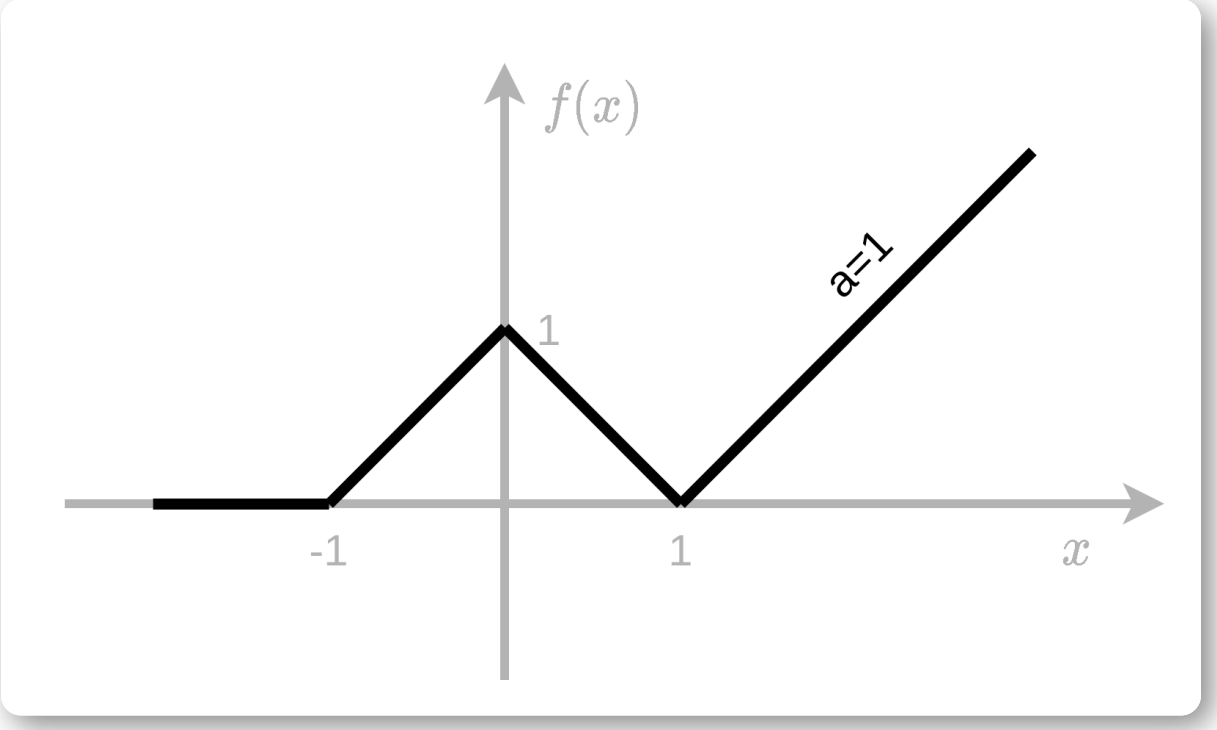
חישוב צעד העדכון

נציב את התוצאות שקיבלנו ואת $\eta = 0.01$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1^{(t+1)} &= \boldsymbol{b}_1^{(t)} - \frac{2\eta}{N}\sum_i (f(\boldsymbol{x}^{(i)};\boldsymbol{\theta}^{(t)}) - y^{(i)})\frac{d}{db_1} f(\boldsymbol{x}^{(i)};\boldsymbol{\theta}^{(t)}) \\
&= 1 - 0.01\left((f(\boldsymbol{x}^{(1)};\boldsymbol{\theta}^{(t)}) - y^{(1)})\frac{d}{db_1} f(\boldsymbol{x}^{(1)};\boldsymbol{\theta}^{(t)}) + (f(\boldsymbol{x}^{(2)};\boldsymbol{\theta}^{(t)}) - y^{(2}\right. \\
&= 1 - 0.01\left((69-70)\cdot 7 + (54-50)\cdot 8\right) = 1 - 0.01\cdot 25 = 0.75
\end{aligned}$$

תרגיל 10.2

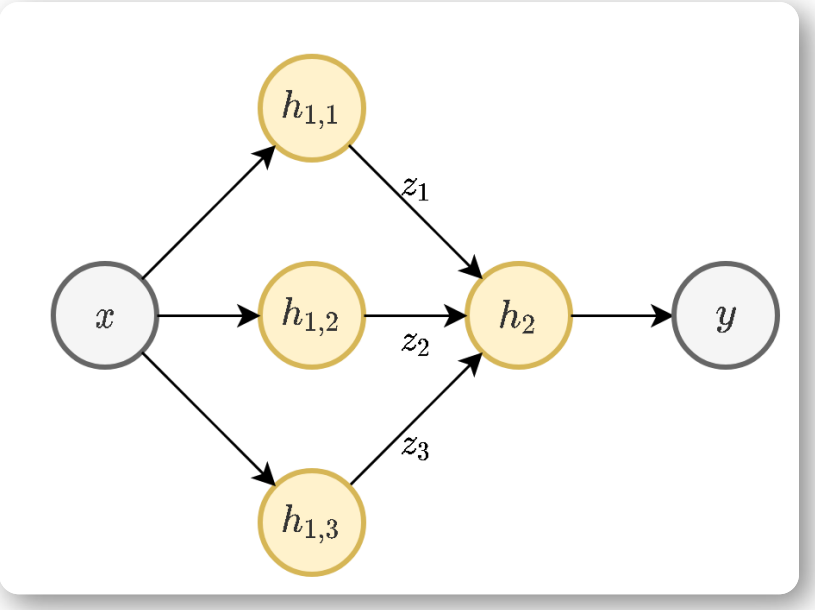
1) הראו כיצד ניתן לייצג את הפונקציה הבאה בעזרת רשת MLP עם פונקציית אקטיבציה מסוג ReLU.



שרטטו את הרשת ורשמו את הערכים של פרמטרי הרשת.

פתרון:

- נבנה פונקציות רציפות ולינאריות למקוטעין, בעלות מספר סופי של קטעים, כמו זו בשבשאלה זו.
- נשתמש בנוירונים בעלי פונקציית אקטיבציה מסוג ReLU הפועלים על קומבינציה לינארית של הכניסות.
- נבנה פונקציה זו בעזרת MLP בעל שיכבה נסתרת אחת אשר דואגת לייצג את המקטעים השונים ושיכבת מוצא אשר דואגת לשיפוע בכל מקטע.
- נקבע את קבוע הbias בכל נוירון כך שהשינוי בשיפוע של ה ReLU (ב $x = 0$) יהיה ממוקם על נקודה בה משתנה השיפוע של הפונקציה המקורית.



$$h_{1,1}(x) = \max(x + 1, 0)$$
$$h_{1,2}(x) = \max(x, 0)$$
$$h_{1,3}(x) = \max(x - 1, 0)$$

כעת נדאג לשיפועים. נסתכל על מקטעים משמאל לימין.

- המקטע השמאלי ביותר הינו בעל שיפוע 0 ולכן הוא כבר מסודר, שכן כל הפונקציות אקטיבציה מתאפסות באיזור זה.
- המקטע $[-1,0]$ מושפע רק מן הנוירון הראשון. השיפוע במקטע זה הינו 1 ולכן ניתן משקל של 1 לנירון זה.
- המקטע $[0,1]$ מושפע משני הנוירונים הראשונים. הנוירון הראשון כבר תורם שיפוע של 1 במקטע זה ולכן עלינו להוסיף לו עוד שיפוע של -2 על מנת לקבל את השיפוע של -1 הנדרש. ולכן ניתן משקל של -2 לנירון השני.
- באופן דומה ניתן לנוירון השלישי משקל של 2.

סה"כ קיבלנו כי $h_2(z_1,z_2,z_3) = z_1 - 2z_2 \times 2z_3$

2) האם ניתן לייצג במדוייק את הפונקציה $f(x) = x^2 + |x|$ בעזרת רשת MLP עם אקטיבציה מסוג ReLU? הסבירו ו/או הדגימו.

מכיוון ש:

1. **נוירון בעל פונקציית הפעלה מסוג ReLU מייצג פונקציה רציפה ולינארית למקוטעין.**
2. **כל הרכבה או סכימה של פונקציות רציפות ולינאריות למקוטעין יצרו תמיד פונקציה חדשה שגם היא רציפה ולינארית למקוטעין.**

מכאן, שנוכל באמצעת נוירונים מסוג ReLU לייצג רק פונקציות רציפות ולנאריות למקוטעין.

- **מכיוון שx^2 אינה לינארית אנו נוכל רק לקרב אותה, אך לא לייצג אותה במדוייק.**

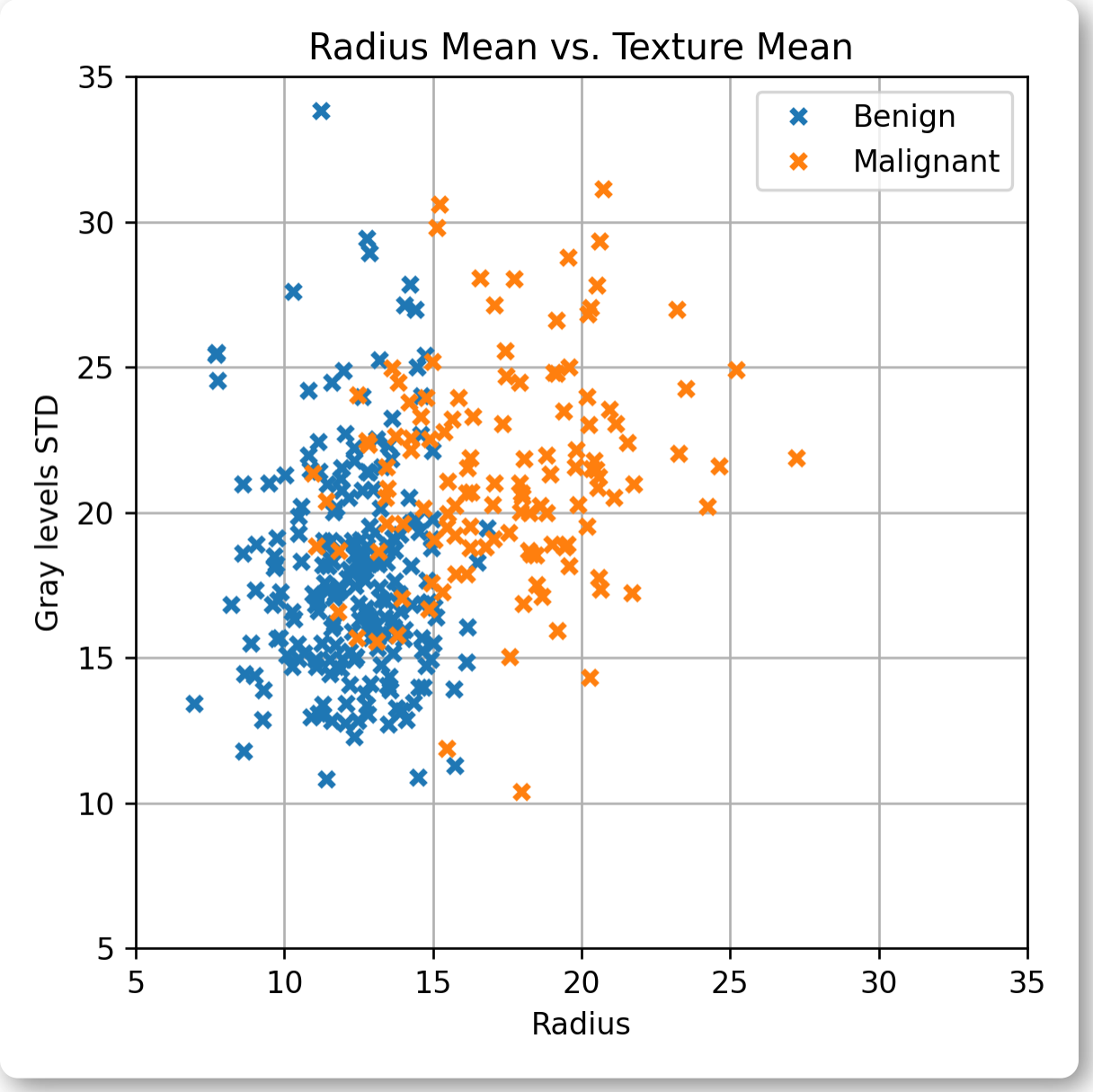
תרגיל מעשי - איבחון סרטן שד עם MLP

Code

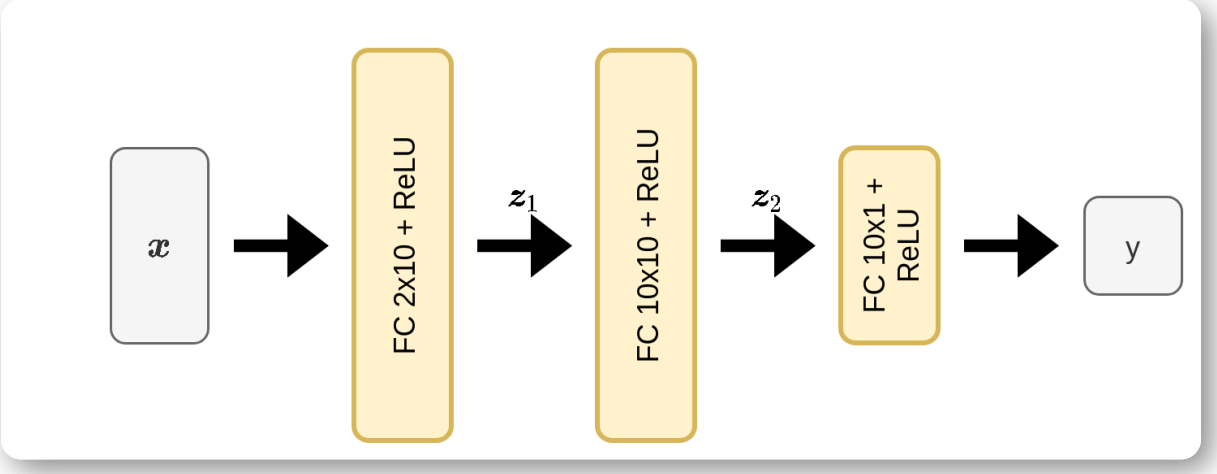
נסתכל שוב על הבעיה של איבחון סרטן שד על סמך תצלום מיקרוסקופי של ריקמה.

	diagnosis	radius_mean	texture_mean	perimeter_mean	area_mean	smoothness_mean	compactness_mean
0	M	17.99	10.38	122.8	1001	0.1184	0.2776
1	M	20.57	17.77	132.9	1326	0.08474	0.07864
2	M	19.69	21.25	130	1203	0.1096	0.1599
3	M	11.42	20.38	77.58	386.1	0.1425	0.2839
4	M	20.29	14.34	135.1	1297	0.1003	0.1328
5	M	12.45	15.7	82.57	477.1	0.1278	0.17
6	M	18.25	19.98	119.6	1040	0.09463	0.109
7	M	13.71	20.83	90.2	577.9	0.1189	0.1645
8	M	13	21.82	87.5	519.8	0.1273	0.1932
9	M	12.46	24.04	83.97	475.9	0.1186	0.2396

נתחיל שוב בביצוע איבחון על סמך שתי העמודות הראשונות בלבד. אנו עושים זאת כמובן רק בכדי שנוכל להציג את הבעיה בגרף דו מימדי.

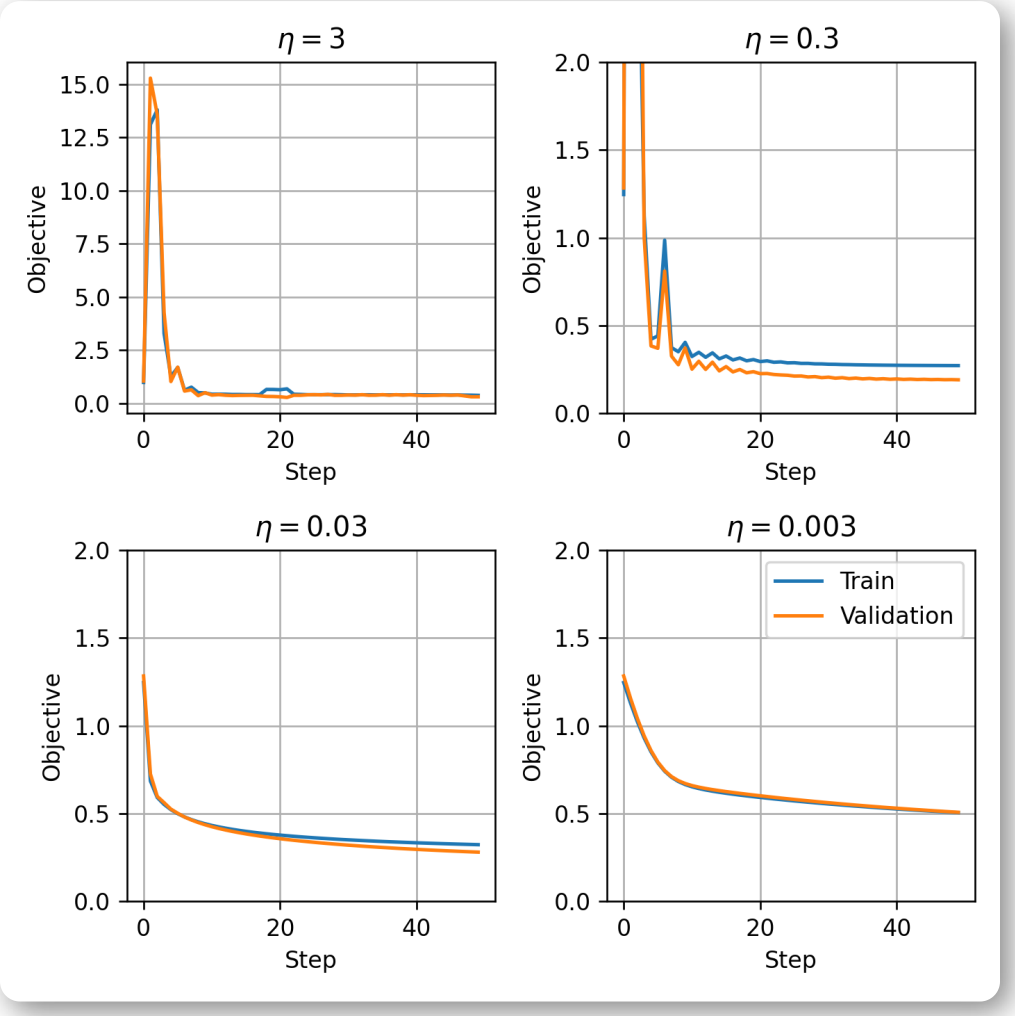


- נפצל אותו שוב ל 60% train / 20% validation / 20% test.
- וננסה להתאים לו את המודל הבא:



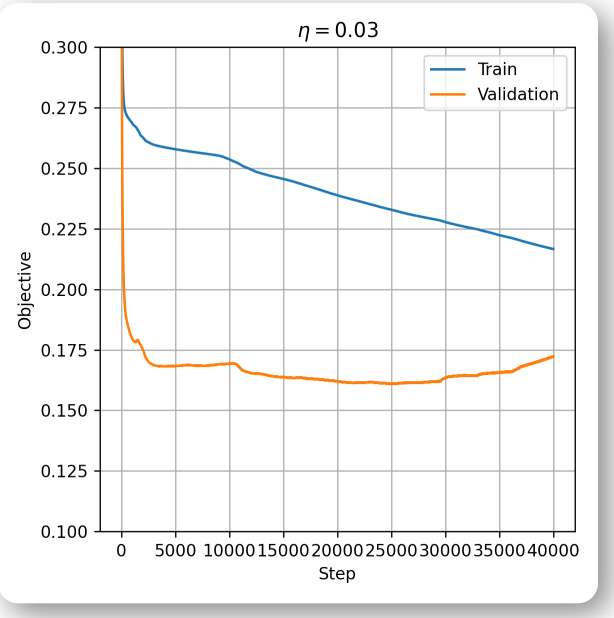
- FC 2x10 מציין שכבה של fully connected שבכניסה אליה יש וקטור באורך 2 וביציאה יש וקטור ברוחב 10

נריץ את אלגוריתם ה gradient descent למספר קטן של צעדים כדי לבחור את קצב הלימוד η



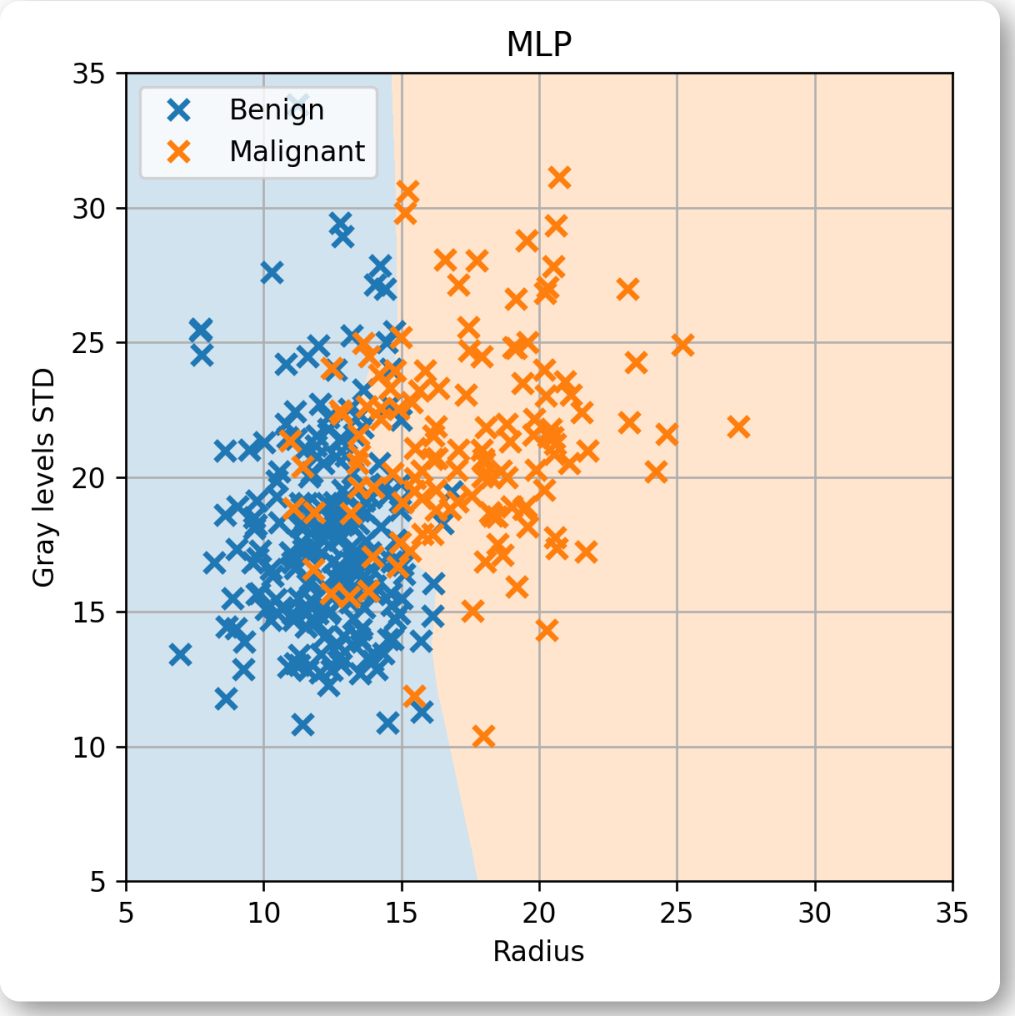
בדומה לתרגול הקודם, אנו נבחר את הערך הגדול ביותר שבו הגרף יורד בצורה מונוטונית שבמקרה זה הינו $\eta = 0.03$.

נריץ כעת האלגוריתם למספר גדול של צעדים:

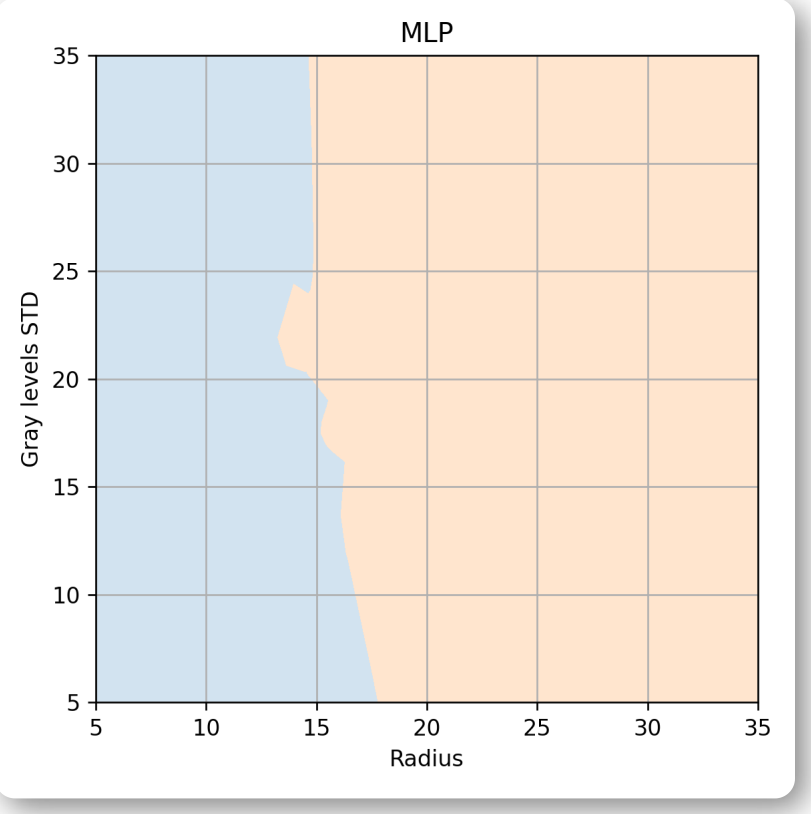


- **החל מנקודה מסויימת, ה- objective על ה validation set מתחיל לעלות.**
- **הסיבה לכך היא תופעת ה- overfitting.**
- **ניתן להימנע מכך על ידי עצירת האלגוריתם לפני שהוא מתכנס. פעולה זו מכונה early stopping.**
- **נשתמש בפרמטרים מהצעד עם הערך של ה objective הנמוך ביותר על ה validation, במקרה זה זהו הצעד ה 25236.**

החזאי המתקבל ממודל זה הינו:



נשרטט גרף זה ללא הדגימות על מנת לראות את קו ההפרדה בין שני השטחים

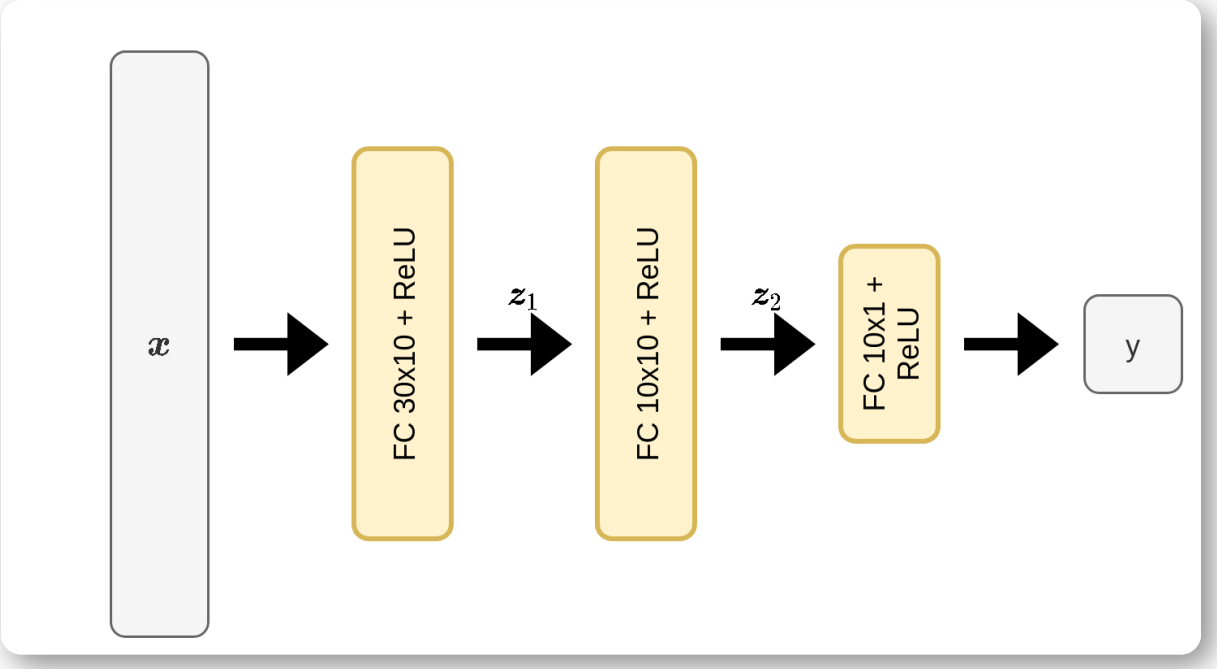


- הרשת מצליחה לייצר חזאי עם קו הפרדה מורכב בהשוואה ל LDA, QDA ו- linear logistic regression.

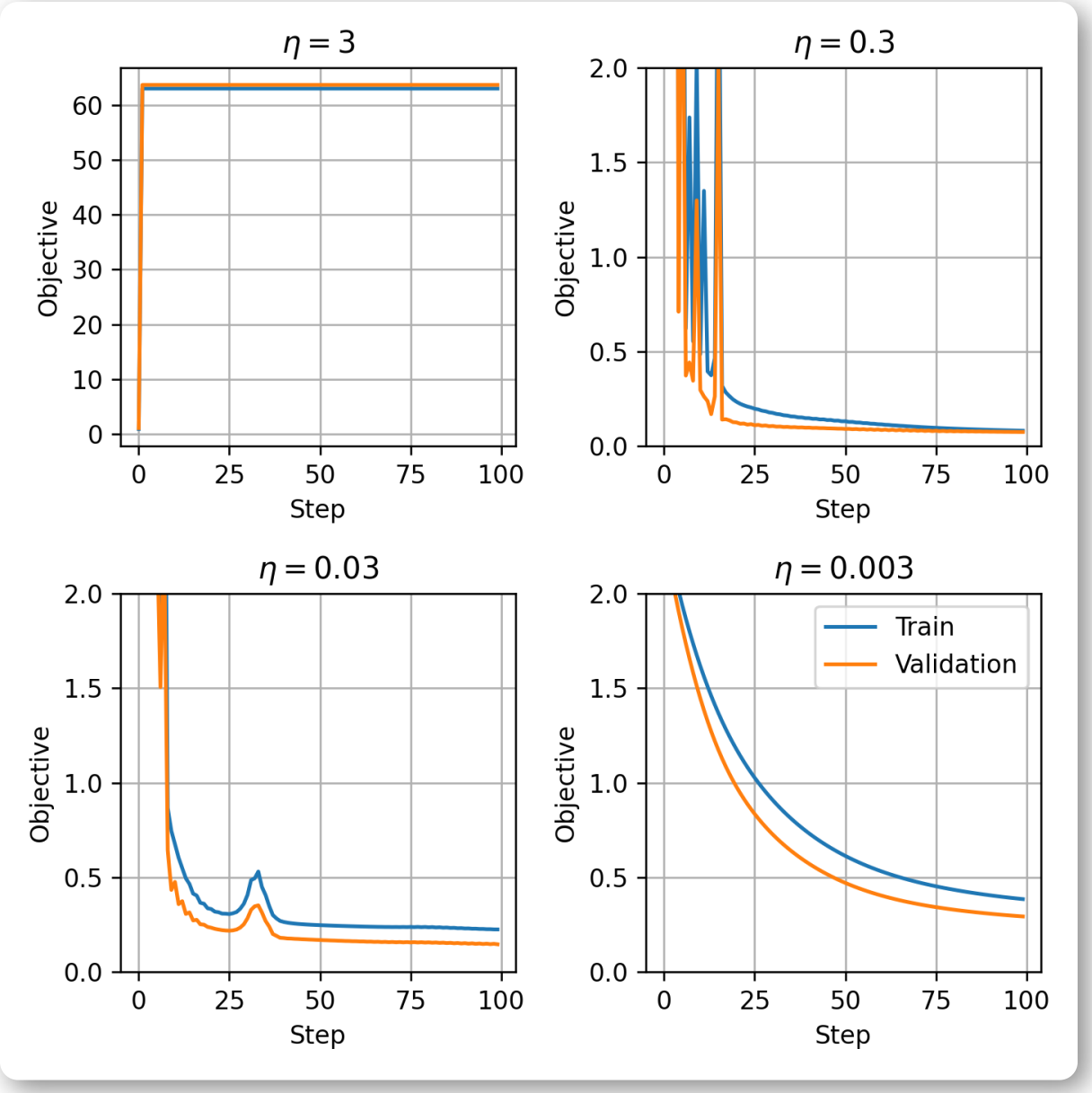
- ביצועי חזאי זה על ה valudation set הינם: 0.08. ביצועים אלו דומים לביצועים של QDA ו linear logistic regresssion.

שימוש בכל 30 העמודות במדגם

נעבור כעת להשתמש בכל 30 העמודות במדגם. לשם כך נשתמש ברשת הבאה:

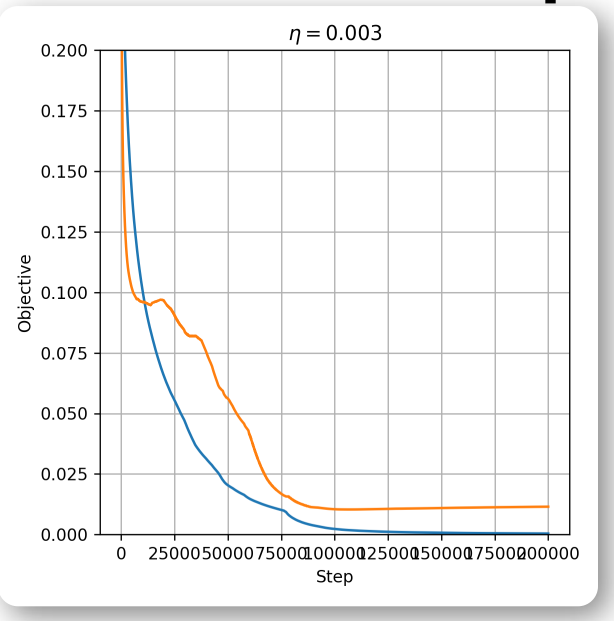


נחפש שוב את הערך המתאים ביותר של η:



במקרה זה נבחר את $\eta = 0.003$.

האימון המלא נראה כך:



- **הביצועים הטובים ביותר על ה validation set מתקבלים בצעד ה 107056.**
- **החזאי המתקבל בצעד זה מניב miscalssifiaction rate של 0.01 על ה validation set.**
- **ביצועי המודל על ה test set הינם 0.03**
  - **לעומת 0.04 ב linear logistic regression.**